



23.a OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática

Facultad de Ciencias Puras y Naturales – Universidad Mayor de San Andrés



(5^{to} y 6^{to} de Primaria)

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA – FASE 2

Categoría: €

Parte I: Preguntas de Opciones Múltiples

Problema 1. Cuando Pedro rompió su alcancía de cerdito, tenía menos de 100 monedas. Al intentar dividirlas en montones de 2 monedas, siempre sobraba una moneda. Lo mismo ocurrió cuando intentó dividirlas en montones de 3, de 4 y de 5 monedas: en todos los casos sobraba exactamente una moneda. ¿Cuántas monedas había en la alcancía?

(A) 31

(B) 41

(C) 51

(D) 61

(E) 71

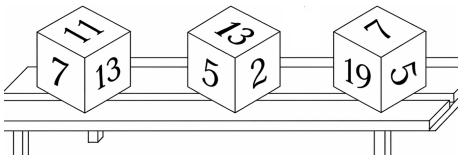
Solución. Como al dividir las monedas en montones de 2, 3, 4 y 5 siempre sobra una moneda, el número de monedas menos uno es divisible por todos esos números. En particular, ese número es divisible por 2 y por 5, por lo que debe terminar en 0. Los posibles valores menores que 100 son 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

De estos, solo 0, 30, 60 y 90 son divisibles por 3, y únicamente 0 y 60 son divisibles por 4. Por tanto, el único valor posible distinto de 0 es 60, lo que implica que Pedro tenía $60 + 1 = 61$ monedas.



Respuesta: (D) 61

Problema 2. Hay tres dados idénticos sobre una banqueta ¿Cuál es la suma de los números que están en las caras de los dados que tocan la banqueta?

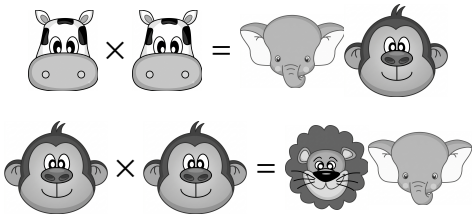


- (A) 26
- (B) 27
- (C) 28
- (D) 39
- (E) 25

Solución. Como los tres dados son idénticos, todos poseen la misma disposición de caras. Observemos primero la cara 13. En la figura aparece junto a las caras: 11, 7, 5, 2. En un cubo cada cara tiene exactamente cuatro caras adyacentes; por lo tanto, la única cara que no es adyacente a 13 es 19. En consecuencia, 13 y 19 son caras opuestas. Análogamente, la cara 7 es adyacente a 11, 13, 19, 5, por lo que la única cara restante, 2, debe ser su opuesta. Así, 7 y 2 son caras opuestas. Finalmente, las dos caras restantes forman el tercer par de caras opuestas: 5 y 11. Por consiguiente, los pares de caras opuestas son (13, 19), (7, 2), (5, 11). Los números de las caras inferiores de cada dado son 5, 19 y 2 la suma es de estos números es 26.

Respuesta: (A) 26

Problema 3. Los dígitos han sido reemplazados por máscaras de manera que a dígitos iguales les corresponde la misma máscara, mientras que a dígitos diferentes les corresponden máscaras diferentes.



En ambas igualdades de la figura, el lado derecho representa un número de dos cifras, donde la primera máscara representa la cifra de las decenas y la segunda, la cifra de las unidades. El lado izquierdo representa el producto de dos números de una cifra.

Determinar el resultado de: (lion mask) + (lion mask) + (elephant mask) + (monkey mask).

- (A) 15
- (B) 16
- (C) 14
- (D) 81
- (E) 19

Solución. En ambos ejemplos, el producto de dos dígitos iguales da como resultado un número de dos cifras que no termina en el mismo dígito inicial. Las únicas opciones posibles para estos dígitos son 4, 7, 8 o 9, cuyos cuadrados son:

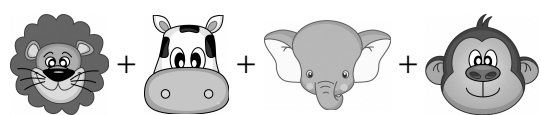
$4 \times 4 = 16, \quad 7 \times 7 = 49, \quad 8 \times 8 = 64, \quad 9 \times 9 = 81$

Observando las operaciones, la multiplicación del **mono** por sí mismo debe terminar en el dígito del **elefante**, y la multiplicación de la **vaca** por sí misma debe terminar en el dígito del **mono**. Esto significa que el resultado del cuadrado de la **vaca** comienza con el **elefante** y termina con el **mono**.

Al analizar las parejas de la lista de cuadrados:

- Si el **mono** fuera 4, su cuadrado es 16, lo que implica que el **elefante** es 6 y el **león** es 1.
- Si el **elefante** es 6 y el **mono** es 4, el número formado en el primer producto es 64. El único cuadrado que da 64 es 8×8 , lo que significa que la **vaca** es 8.

Por lo tanto, sustituyendo los valores correspondientes para resolver la suma solicitada:

 $= 1 + 8 + 6 + 4 = 19.$

Respuesta: (E) 19

Parte II: Preguntas de Respuesta Corta

Problema 4. Al escribir el cuadrado y el cubo de un número entero positivo, se obtiene dos números en las que aparecen exactamente una vez los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Determine el número positivo.

Solución. Sea n el número positivo, así: $A = n^2, B = n^3$. Como en A y B deben aparecer exactamente ocho cifras. Si $n \leq 20$, entonces $20^2 = 400, 20^3 = 8000$, por lo que A y B tendrían en conjunto solamente siete cifras, lo cual es imposible. Por otra parte, $32^2 = 1024, 32^3 = 32768$, que son nueve cifras. En consecuencia, $20 < n < 32$. Ahora analizamos el último dígito de n .

- Si n termina en 1, 5 o 6, entonces n^2 y n^3 terminan en la misma cifra, contradiciendo que todas las cifras sean distintas.
- Si n termina en 3 o 7, entonces n^2 termina en 9, cifra que no puede aparecer.

Por lo tanto, el último dígito de n únicamente puede ser 2, 4 u 8. Como además $20 < n < 32$, los únicos candidatos son $n = 22, 24, 28$.

Caso $n = 22$: Se tiene $22^2 = 484, 22^3 = 10648$. Las cifras 4 y 8 aparecen repetidas y además interviene el 0. Por tanto, este caso no sirve.

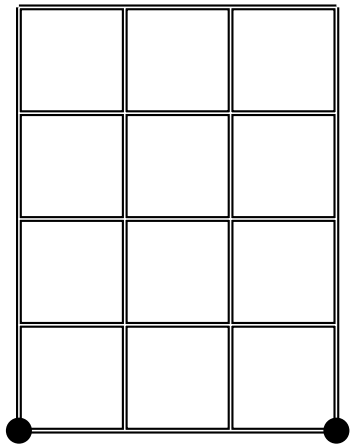
Caso $n = 24$: Se obtiene $24^2 = 576, 24^3 = 13824$. Las cifras utilizadas son 5, 7, 6, 1, 3, 8, 2, 4, que corresponden exactamente a los dígitos del 1 al 8, cada uno una sola vez.

Caso $n = 28$: En este caso, $28^2 = 784, 28^3 = 21952$. Aparece el dígito 9, lo cual contradice las condiciones del problema.

Por consiguiente, el único valor posible es $n = 24$.

Respuesta: 24.

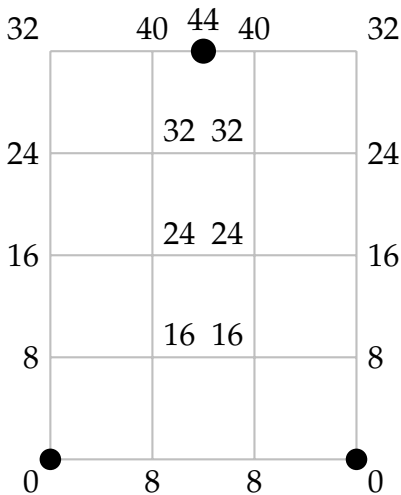
Problema 5. Mateo construyó una estructura rectangular formada por palillos de madera, dispuestos en una cuadrícula de 3 columnas y 4 filas, como se muestra en la figura. Para construirla utilizó exactamente 31 palillos. Mateo enciende simultáneamente los dos extremos inferiores de los palillos verticales que forman los lados izquierdo y derecho de la estructura. El fuego avanza con rapidez constante a lo largo de cada palillo y se transmite a un palillo contiguo en el instante en que alcanza el extremo común. Un palillo que arde desde un solo extremo tarda 8 segundos en consumirse, mientras que si arde simultáneamente desde ambos extremos tarda 4 segundos. ¿Cuántos segundos transcurren desde que Mateo enciende el fuego hasta que se consume completamente toda la estructura?



Solución. Para resolver el problema, podemos calcular el tiempo exacto en segundos que tarda el fuego en alcanzar cada “nodo” o intersección de la estructura. Dado que el fuego inicia simultáneamente en las dos esquinas inferiores, ambos nodos comienzan en el tiempo $t = 0$. A partir de ahí, el fuego avanza a lo largo de los palillos adyacentes a una velocidad de un palillo cada 8 segundos. En el siguiente diagrama se muestra el tiempo en el que el fuego llega a cada intersección.

Como se observa en la distribución simétrica:

- Los últimos vértices en encenderse son los dos centros de la fila superior, alcanzando los 40 segundos.
- El último palillo restante es el segmento horizontal superior que une estos dos nodos de 40 segundos.
- El fuego entrará a este palillo final por ambos extremos al mismo tiempo. Por lo tanto, las dos llamas se encontrarán exactamente en la mitad del palillo tras avanzar durante la mitad de su tiempo de combustión:

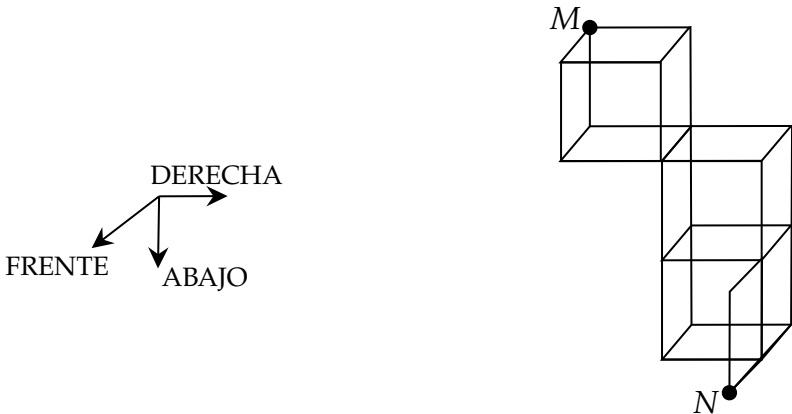


tiempo final = 40 + $\frac{8}{2}$ = 44 segundos.

Toda la estructura se habrá consumido por completo a los **44 segundos**.

Respuesta: **44.**

Problema 6. La siguiente figura representa una estructura de alambre. Las flechas indican las direcciones permitidas para recorrer sus aristas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir desde el punto M hasta el punto N , recorriendo únicamente las líneas de la estructura y respetando las direcciones indicadas?

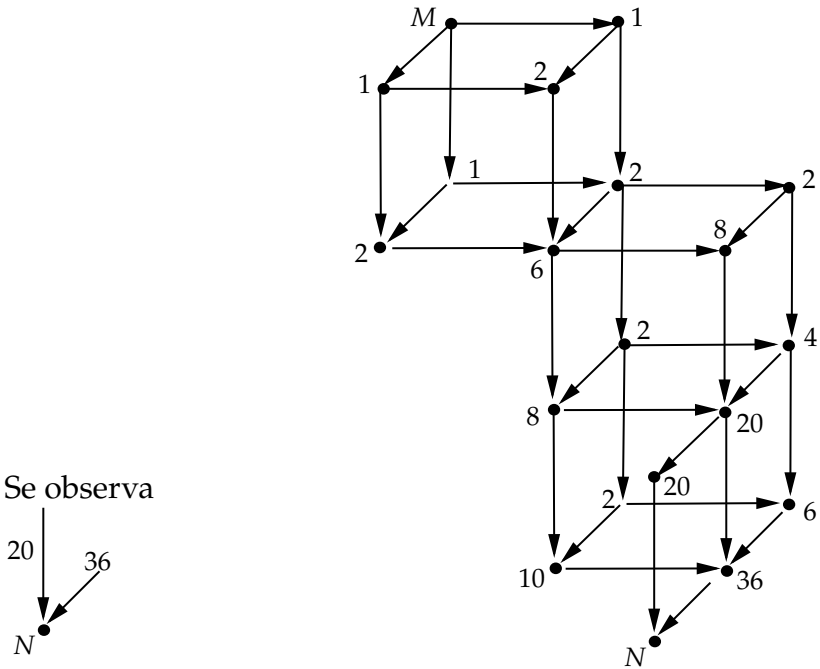


Solución. Para determinar la cantidad total de rutas desde M hasta N , aplicamos el principio de adición anotando en cada vértice el número de caminos distintos para alcanzarlo desde el origen M . Las direcciones permitidas son únicamente Derecha, Frente y Abajo.

- **Asignación inicial:** Al punto de partida M le corresponde 1 forma de estar ahí. Los vértices adyacentes a los que se puede llegar directamente desde M reciben el valor 1.
- **Propagación:** Para cualquier otro vértice, el número total de formas de llegar equivale a la suma de los valores de los vértices cuyos caminos apuntan directamente hacia él.

Sumando secuencialmente estos valores a través de la estructura (como se ilustra en la figura), observamos los vértices que inciden en el punto final N : llegan dos flechas, una desde un vértice con valor 20 y otra desde un vértice con valor 36. Por lo tanto, el número total de caminos hacia N es:

$20 + 36 = 56$



Respuesta: 56

Clave de respuestas



1. (D) 61.
2. (A) 26
3. (E) 19.
4. 24.
5. 44.
6. 56.

OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA
Av. Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
<https://opmat.fcpn.edu.bo/>