23.ª OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática

Facultad de Ciencias Puras y Naturales – Universidad Mayor de San Andrés

(5to y 6to de Secundaria)

Pregunta y Solución de la Prueba Fase Final

Categoría: γ

Problema 1.

Puntaje: ☐

Para prepararse para un examen selectivo, Hugo y Hernán dedicaron 30 días a resolver problemas. Cada día, Hugo resolvió un problema más o un problema menos que el día anterior, mientras que Hernán resolvió dos problemas más o dos problemas menos que el día anterior. Al finalizar los 30 días, Hernán había resuelto, en total, exactamente 13 problemas más que Hugo. Diremos que un día es *peculiar* si Hugo y Hernán resolvieron la misma cantidad de problemas ese día. Determine el máximo número posible de días peculiares.

Solución. Sean a_i y b_i las cantidades de problemas resueltos por Hugo y Hernán, respectivamente, durante el día i. Por hipótesis,

$$a_{i+1} - a_i \in \{-1, 1\}, \qquad b_{i+1} - b_i \in \{-2, 2\}.$$

Como $a_{i+1} - a_i$ es impar, la paridad de a_i cambia cada día. En cambio, como $b_{i+1} - b_i$ es par, la paridad de b_i permanece constante. Por tanto, la igualdad $a_i = b_i$ solo puede ocurrir en días de una misma paridad, es decir, únicamente en los días impares o únicamente en los días pares. Como hay 15 días de cada paridad, concluimos que el número de días peculiares es a lo sumo 15.

Veamos que esta cota se alcanza respetando también la condición sobre el total de problemas resueltos. Definamos, para $1 \le i \le 30$,

$$(a_i, b_i) = \begin{cases} (100, 100), & i \text{ impar}, \\ (99, 98), & i = 2, \\ (101, 102), & i \text{ par}, \ i \neq 2. \end{cases}$$

Observemos que Hugo cambia su cantidad de problemas en exactamente 1 entre días consecutivos, mientras que Hernán la cambia en exactamente 2. Además, los 15 días impares son peculiares. En cuanto a la diferencia entre los totales, tenemos

$$\sum_{i=1}^{30} (b_i - a_i) = 15 \cdot 0 + (-1) + 14 \cdot 1 = 13.$$

Así, la construcción satisface todas las condiciones y tiene exactamente 15 días peculiares. Por tanto, el máximo es 15.

Problema 2.

Puntaje: ☐

Encuentre el mayor entero N tal que ambas raíces de $P(x) = 2x^2 + Nx + 2026$ sean enteras.

Solución. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ las raíces enteras del polinomio $P(x)$. Por medio del teorema de factorización y las fórmulas de Viète, podemos expresar la suma y el producto de las raíces en función de los coeficientes del polinomio:

$$a + b = -\tfrac{N}{2} \quad \text{y} \quad ab = \tfrac{2026}{2} = 1013.$$

Dado que a y b son números enteros, su producto debe ser igual a 1013. Al descomponer 1013 en factores primos, notamos que es un número primo. Por lo tanto, las únicas parejas de factores enteros (a, b) posibles, salvo el orden, son:

$$(a, b) \in \{(1, 1013), (-1, -1013)\}.$$

A partir de la relación de la suma $N = -2(a + b)$, evaluamos los valores posibles para N:

- Si $(a, b) = (1, 1013)$, entonces: $N = -2(1 + 1013) = -2(1014) = -2028$.

- Si $(a, b) = (-1, -1013)$, entonces: $N = -2(-1 - 1013) = -2(-1014) = 2028$.

Por consiguiente, los valores posibles para N son $\{-2028, 2028\}$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar N es 2028.

Problema 3.

Puntaje: ☐

Determine todos los números primos p tales que el número

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + 2026^p$$

es múltiplo de p.

Solución. Sea p un número primo. Por el Pequeño Teorema de Fermat, para todo número entero k se cumple la congruencia:

$$k^p \equiv k \pmod{p}$$

Aplicando esta propiedad a cada término de la suma dada, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2026} k^p &\equiv \sum_{k=1}^{2026} k \pmod{p} \\ &\equiv \frac{2026 \cdot 2027}{2} \pmod{p} \\ &\equiv 1013 \cdot 2027 \pmod{p}\end{aligned}$$

Por la definición de divisibilidad en aritmética modular, la suma original es múltiplo de p si y solo si el resultado anterior es congruente con cero módulo p, es decir:

$$p \mid \sum_{k=1}^{2026} k^p \iff p \mid (1013 \cdot 2027)$$

Para determinar si 1013 y 2027 son números primos, verificamos si admiten divisores primos menores o iguales a sus respectivas raíces cuadradas ($\sqrt{1013} \approx 31{,}8$ y $\sqrt{2027} \approx 45{,}02$). Al realizar la comprobación, se confirma que ambos son números primos y distintos entre sí.
Dado que p es un número primo y divide al producto $1013 \cdot 2027$, por el Lema de Euclides (o teorema de factorización única), p debe dividir al menos a uno de los factores. Por lo tanto, los únicos valores posibles para p son:

$$p \in \{1013, 2027\}.$$

Problema 4.

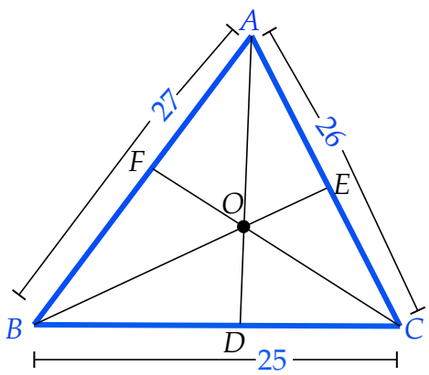
Puntaje: ☐

En el triángulo ABC, se tiene $BC = 25$, $CA = 26$ y $AB = 27$. Sean D, E, F puntos de BC, CA, AB, respectivamente, tales que las rectas AD, BE, CF concurren en el circuncentro de ABC. Determine el valor de

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}.$$

Solución. Denotemos por $a = 25$, $b = 26$ y $c = 27$ las longitudes de los lados del triángulo ABC, y sea O su circuncentro. Verificamos la naturaleza del triángulo observando su lado mayor $c = 27$:

Sabiendo que $c^2 = 27^2 = 729$, mientras que $a^2 + b^2 = 25^2 + 26^2 = 625 + 676 = 1301$. Así $c^2 < a^2 + b^2$, por el Teorema del Coseno se deduce que el ángulo en el vértice C es agudo. Como c es el lado de mayor longitud, los tres ángulos del triángulo ABC son agudos. Por consiguiente, el triángulo ABC es **acutángulo**, lo cual garantiza que su circuncentro O se encuentra en el **interior** del triángulo.



Denotemos por $[XYZ]$ el área del triángulo XYZ y sea $R = OA = OB = OC$ el circunradio de ABC. Dado que las regiones OBC y ABC comparten la base BC, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus alturas con respecto a dicha base, la cual por proporcionalidad corresponde a la razón de segmentos sobre la ceviana AD:

$$\frac{[OBC]}{[ABC]} = \frac{OD}{AD}.$$

Dado que O es interior al triángulo, se cumple $AD = AO + OD = R + OD$, de donde $OD = AD - R$. Sustituyendo esta expresión obtenemos:

$$\frac{[OBC]}{[ABC]} = \frac{AD - R}{AD} = 1 - \frac{R}{AD} \implies \frac{R}{AD} = 1 - \frac{[OBC]}{[ABC]} = \frac{[ABC] - [OBC]}{[ABC]}.$$

Puesto que O es un punto interior, el triángulo ABC se descompone exactamente en la unión no solapada de los triángulos OAB, OBC y OCA. Por lo tanto, $[ABC] - [OBC] = [OAB] + [OCA]$, lo que nos da:

$$\frac{R}{AD} = \frac{[OAB] + [OCA]}{[ABC]}.$$

De manera análoga, aplicando el mismo razonamiento para las cevianas BE y CF, se deducen las relaciones cíclicas:

$$\frac{R}{BE} = \frac{[OBC] + [OAB]}{[ABC]} \quad \text{y} \quad \frac{R}{CF} = \frac{[OCA] + [OBC]}{[ABC]}.$$

Sumando las tres expresiones miembro a miembro:

$$R\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right) = \frac{2\big([OAB] + [OBC] + [OCA]\big)}{[ABC]} = \frac{2[ABC]}{[ABC]} = 2.$$

De aquí se obtiene la importante relación geométrica general:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}. \tag{1}$$

Por otro lado, el semiperímetro del triángulo ABC es $s = \frac{25+26+27}{2} = 39$. Aplicando la fórmula de Herón para calcular el área $[ABC]$:

$$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{39 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12} = \sqrt{(13 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 7) \cdot 13 \cdot (3 \cdot 2^2)} = 78\sqrt{14}.$$

A continuación, utilizamos la fórmula $R = \dfrac{abc}{4[ABC]}$ para determinar el valor del circunradio:

$$R = \frac{25 \cdot 26 \cdot 27}{4 \cdot 78\sqrt{14}} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 27}{312\sqrt{14}} = \frac{225}{4\sqrt{14}}.$$

Luego, sustituyendo el circunradio R en la identidad obtenida en la ecuación (1):

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R} = \frac{2}{\left(\dfrac{225}{4\sqrt{14}}\right)} = \frac{8\sqrt{14}}{225}.$$

Problema 5.

Puntaje: ☐

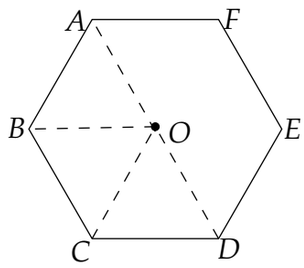
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que, para todo triángulo equilátero no degenerado de vértices A, B, C, se cumple

$$f(A) + f(B) + f(C) = 0.$$

Determine todos los posibles valores distintos puede tomar $f(2026, 2026)$.

Solución. Sea O un punto arbitrario en el plano $\mathbb{R}^2$. Es posible construir un hexágono regular $ABCDEF$ cuyo centro sea precisamente el punto O.
Por las propiedades geométricas del hexágono regular, los seis triángulos formados por el centro y dos vértices consecutivos, es decir, OAB, OBC, OCD, ODE, OEF y OFA, son triángulos equiláteros no degenerados. Aplicando la condición del problema a cada uno de ellos, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f(O) + f(A) + f(B) &= 0 \\
f(O) + f(B) + f(C) &= 0 \\
f(O) + f(C) + f(D) &= 0 \\
f(O) + f(D) + f(E) &= 0 \\
f(O) + f(E) + f(F) &= 0 \\
f(O) + f(F) + f(A) &= 0
\end{aligned}
$$



Sumando estas seis ecuaciones, se deduce que:

$$6f(O) + 2\big(f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + f(E) + f(F)\big) = 0 \tag{2}$$

Por otro lado, dentro del mismo hexágono regular, los triángulos formados por los vértices alternos, ACE y BDF, también son triángulos equiláteros no degenerados. Por lo tanto, se cumple que:

$$
\begin{aligned}
f(A) + f(C) + f(E) &= 0 \\
f(B) + f(D) + f(F) &= 0
\end{aligned}
$$

Al sumar ambas expresiones, obtenemos la suma total de los valores de f en los seis vértices del hexágono:

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + f(E) + f(F) = 0. \tag{3}$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2), resulta:

$$6f(O) + 2(0) = 0 \implies 6f(O) = 0 \implies f(O) = 0.$$

Dado que O fue elegido de manera totalmente arbitraria en $\mathbb{R}^2$, concluimos que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. En particular, evaluando en el punto especificado:

$$f(2026, 2026) = 0.$$

Por lo tanto, el único valor posible que puede tomar $f(2026, 2026)$ es **0**.