



23^a OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS.



PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

CATEGORÍA γ

5^{to} Y 6^{to} DE SECUNDARIA



Julio, 2026

Preguntas

Tiempo estimado: 80 min

Problema 1. Las edades de Hugo y su abuelo suman 120 años. Hace 15 años, la edad del abuelo de Hugo era cuatro veces la edad de Hugo. ¿Cuántos años tiene Hugo actualmente?

- (A) 36 (B) 24 (C) 33 (D) 35 (E) 30

Problema 2. ¿Cuál es el menor entero positivo n tal que $\sqrt[n]{2026}$ es menor que 5?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Problema 3. ¿Cuántos números de tres cifras tienen suma de cifras igual a 9?

- (A) 55 (B) 42 (C) 38 (D) 40 (E) 45

Problema 4. Sea $a, b, c > 0$ con $abc = 8$. Calcule el valor mínimo de: $a + b + c$.

- (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

Problema 5. Determine el último dígito de:

$$7^{2026}.$$

- (A) 7 (B) 9 (C) 3 (D) 1 (E) 5

Problema 6. ¿Cuántos enteros positivos menores que 2026 tienen todos sus dígitos distintos y, al leerlos de izquierda a derecha, están en orden estrictamente creciente o estrictamente decreciente? Considere que los números de una cifra también satisfacen la condición.

- (A) 330 (B) 340 (C) 350 (D) 359 (E) 365

Problema 7. Fernando come una fruta al día, que puede ser un plátano, una manzana o un durazno, pero nunca come la misma fruta en dos días seguidos. Durante dos semanas, Fernando anotó las frutas que comió. Resultó que la cantidad de duraznos que comió fue el doble de la cantidad de plátanos que comió. ¿Cuántas manzanas comió Fernando durante estas dos semanas?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Problema 8. Ramanujan coloca los números enteros del 1 al 100 alrededor de un círculo. Por cada número que sea mayor que la suma de sus vecinos, su mentor Hardy le da una moneda de oro. ¿Cuál es la mayor cantidad de monedas de oro que puede recibir Ramanujan?

- (A) 99 (B) 50 (C) 49 (D) 25 (E) 55

Problema 9. En un triángulo rectángulo los catetos miden 9 y 12. Calcule el radio del círculo inscrito.

- (A) 3 (B) 3,5 (C) 4 (D) 4,5 (E) 5

Problema 10. Hallar el valor de

$$E = 1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + 2025^2 - 2026^2$$

- (A) 4106702 (B) -5100000 (C) 5535050 (D) -2053351 (E) -5050550

Problema 11. ¿Cuántos enteros positivos n existen, tales que $n + 9$ divide a $n^2 + 9$?

- (A) 9 (B) 11 (C) 7 (D) 6 (E) 5

Problema 12. Para un $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ denota la cantidad de números $x \in \mathbb{N}$, tales que $MCD(n, x) = 1$ y $x \leq n$. Cuántas soluciones tiene la ecuación: $n + \varphi(n) = 25$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 6

Problema 13. Sea $ABCD$ un paralelogramo de lados $AB = 12$, $BC = 8$. Las circunferencias ω_1 y ω_2 pasan por B y tienen centros A y C respectivamente. Una circunferencia arbitraria con centro en D corta ω_1 en los puntos P_1 , Q_1 y ω_2 en los puntos P_2 , Q_2 . Hallar el cociente $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}$.

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{6}{7}$ (E) $\frac{2}{3}$

Soluciones

Solución del Problema 1. Sea x la edad actual de Hugo. Entonces la edad actual de su abuelo es $120 - x$. Hace 15 años, Hugo tenía $x - 15$ años y su abuelo tenía $120 - x - 15 = 105 - x$. Según el enunciado,

$$105 - x = 4(x - 15) \implies 105 - x = 4x - 60 \implies x = 33.$$

Por lo tanto, Hugo tiene actualmente 33 años.

Respuesta: (C) 33

Solución del Problema 2. Buscamos el menor entero positivo tal que $\sqrt[n]{2026} < 5$. Elevando ambos lados a la potencia n , se obtiene $2026 < 5^n$. Probamos potencias de 5:

$$5^4 = 625 < 2026 \quad \text{y} \quad 5^5 = 3125 > 2026.$$

Por lo tanto, el menor entero positivo n que cumple la condición es $n = 5$.

Respuesta: (B) 5

Solución del Problema 3. Sea $\overline{abc}$ un número de tres cifras, donde a , b y c representan, respectivamente, las cifras de las centenas, decenas y unidades. Como el número tiene tres cifras, necesariamente $a \geq 1$, y además, por la condición del problema, $a + b + c = 9$. Para eliminar la restricción $a \geq 1$, definimos $a' = a - 1$. Entonces $a' \geq 0$ y la ecuación anterior se transforma en

$$a' + b + c = 8,$$

donde a' , b y c son enteros no negativos. Ahora debemos contar el número de soluciones enteras no negativas de esta ecuación. Por el principio de *estrellas y barras*, dicho número es

$$\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45.$$

Finalmente, observemos que ninguna de las cifras puede exceder 9. En efecto, como $a' + b + c = 8$, cada una de las variables a' , b y c es, como máximo, 8. Por tanto, $a = a' + 1 \leq 9$, y también $b \leq 8 < 10$, $c \leq 8 < 10$. Así, todas las soluciones obtenidas corresponden efectivamente a números de tres cifras. Por lo tanto, existen 45 números de tres cifras cuya suma de cifras es igual a 9.

Respuesta: (E) 45

Solución del Problema 4. Como a , b y c son números reales positivos, podemos aplicar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica (AM–GM), la cual establece que

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Puesto que $abc = 8$, se obtiene $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{8} = 2$. Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por 3, resulta

$$a + b + c \geq 6.$$

Por lo tanto, el valor mínimo posible de $a + b + c$ es, como máximo, 6. Resta verificar que dicho valor puede alcanzarse. La igualdad en la desigualdad AM–GM se cumple si y solo si $a = b = c$. Como además $abc = 8$, se tiene $a^3 = 8$, de donde

$$a = b = c = 2.$$

En este caso, $a + b + c = 2 + 2 + 2 = 6$. Por consiguiente, el valor mínimo de $a + b + c$ es 6.

Respuesta: (C) 6

Solución del Problema 5. Para determinar el último dígito de 7^{2026} , basta calcular dicho número módulo 10, pues el residuo al dividir entre 10 coincide con su última cifra. Observemos las primeras potencias de 7 módulo 10:

$$7^1 \equiv 7 \pmod{10},$$

$$7^2 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$7^3 \equiv 7 \cdot 9 = 63 \equiv 3 \pmod{10},$$

$$7^4 \equiv 7 \cdot 3 = 21 \equiv 1 \pmod{10}.$$

A partir de aquí, la sucesión de residuos vuelve a repetirse, ya que

$$7^5 \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7 \pmod{10}.$$

Por tanto, los últimos dígitos de las potencias de 7 siguen un ciclo de longitud 4:

$$7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \dots$$

Ahora calculamos el residuo del exponente al dividirlo entre 4:

$$2026 = 4 \cdot 506 + 2,$$

es decir, $2026 \equiv 2 \pmod{4}$. Como el patrón tiene período 4, el último dígito de 7^{2026} coincide con el de 7^2 , que es $7^2 = 49$. En consecuencia, el último dígito de 7^{2026} es 9.

Respuesta: (B) 9

Solución del Problema 6. Contaremos los números según su cantidad de cifras. Para los números de una cifra, existen 9 posibilidades.

Para los números de dos cifras, si los dígitos están en orden creciente, no podemos utilizar el 0, pues aparecería al inicio. Por tanto, hay $\binom{9}{2} = 36$ números. Si los dígitos están en orden decreciente, podemos elegir dos dígitos distintos entre los diez disponibles, pues al ordenarlos decrecientemente el primer dígito nunca será 0. Hay $\binom{10}{2} = 45$ números. Así, hay $36 + 45 = 81$ números de dos cifras.

De manera similar, la cantidad de números de tres cifras es

$$\binom{9}{3} + \binom{10}{3} = 84 + 120 = 204.$$

Ahora consideremos los números de cuatro cifras menores que 2026. Si sus dígitos están en orden creciente, el primer dígito debe ser 1. En efecto, si comenzara con 2, los siguientes dígitos serían mayores que 2, por lo que el número sería al menos $2345 > 2026$. Fijado el 1, elegimos los otros tres dígitos entre $2, 3, \dots, 9$. Esto puede hacerse de $\binom{8}{3} = 56$ formas. No hay números de cuatro cifras en orden decreciente menores que 2026, pues el menor número de cuatro cifras con dígitos estrictamente decrecientes es $3210 > 2026$.

Por lo tanto, la cantidad total es

$$9 + 81 + 204 + 56 = 350.$$

Respuesta: (C) 350

Solución del Problema 7. Durante dos semanas hay 14 días. Sea p la cantidad de plátanos, m la cantidad de manzanas y d la cantidad de duraznos. Según el enunciado,

$$d = 2p \quad \text{y} \quad p + m + d = 14$$

Sustituyendo $d = 2p$, obtenemos $m = 14 - 3p$. Notamos que como Fernando no comio frutas iguales en días consecutivos, entonces $p, m, d \leq 7$. En particular

$$2p = d \leq 7 \quad \text{y} \quad 14 - 3p = m \leq 7 \implies \frac{7}{3} \leq p \leq \frac{7}{2}$$

Dado que p es un número natural la única posibilidad es $p = 3$. Reemplazando en $m = 14 - 3p$ concluimos que Fernando comio 5 manzanas.

Respuesta: (C) 5

Solución del Problema 8. Primero notemos que dos números vecinos no pueden ganar moneda al mismo tiempo. En efecto, si un número es mayor que la suma de sus dos vecinos, entonces en particular es mayor que cada uno de sus vecinos. Por lo tanto, ninguno de esos vecinos puede ser mayor que la suma de sus propios vecinos.

Así, como hay 100 números en un círculo, a lo más pueden ganar moneda 50 números.

Ahora veamos que sí se puede lograr 50. Colocamos los números pequeños en el siguiente orden circular:

$$1, 50, 2, 49, 3, 48, \dots, 25, 26.$$

Las sumas de dos números pequeños consecutivos son, como máximo, 52, excepto una que es 27. Insertamos un número grande entre cada par de pequeños consecutivos. Las sumas de los pares son 27 (una vez), 51 (25 veces) y 52 (24 veces).

Colocamos el 51 en el hueco de suma 27, el 52 en cualquiera de los huecos de suma 51, y los números 53 a 100 en los 48 huecos restantes, en cualquier orden: como todo hueco tiene suma a lo sumo 52, cada uno de estos números supera la suma de sus dos vecinos. Los 50 números grandes reciben moneda.

Respuesta: (B) 50

Solución del Problema 9. Como el triángulo es rectángulo y sus catetos miden 9 y 12, por el teorema de Pitágoras la longitud de la hipotenusa es

$$\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

En un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c , el radio r del círculo inscrito está dado por

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Sustituyendo los valores $a = 9$, $b = 12$ y $c = 15$, obtenemos

$$r = \frac{9 + 12 - 15}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Por lo tanto, el radio del círculo inscrito es 3.

Respuesta: (A) 3

Solución del Problema 10. Agrupamos los términos de dos en dos:

$$E = (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + (2025^2 - 2026^2).$$

En cada par aplicamos la identidad

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Así,

$$\begin{aligned} E &= (1 - 2)(1 + 2) + (3 - 4)(3 + 4) + \cdots + (2025 - 2026)(2025 + 2026) \\ &= -(1 + 2) - (3 + 4) - \cdots - (2025 + 2026) \\ &= -(1 + 2 + 3 + \cdots + 2025 + 2026). \end{aligned}$$

Como

$$1 + 2 + \cdots + 2026 = \frac{2026 \cdot 2027}{2},$$

se obtiene

$$E = -\frac{2026 \cdot 2027}{2} = -2053351.$$

Respuesta: (D) -2053351

Solución del Problema 11. Buscamos los enteros positivos n tales que $n + 9$ divida a $n^2 + 9$ ($n + 9 \mid n^2 + 9$). Como al dividir n entre $n + 9$ el residuo es -9 , se tiene la congruencia

$$n \equiv -9 \pmod{n + 9}.$$

Elevando ambos miembros al cuadrado, obtenemos

$$n^2 \equiv (-9)^2 = 81 \pmod{n + 9},$$

y, en consecuencia, $n^2 + 9 \equiv 81 + 9 = 90 \pmod{n + 9}$. Puesto que $n + 9 \mid n^2 + 9$, necesariamente debe cumplirse $n + 9 \mid 90$. Recíprocamente, si $n + 9$ es un divisor positivo de 90, entonces $90 \equiv 0 \pmod{n + 9}$, y como $n^2 + 9 \equiv 90 \pmod{n + 9}$, se concluye que

$$n + 9 \mid n^2 + 9.$$

Por lo tanto, basta considerar los divisores positivos de 90 mayores que 9, ya que $n > 0$. Estos son

$$10, 15, 18, 30, 45, 90.$$

De aquí se obtiene $n = 10 - 9, 15 - 9, 18 - 9, 30 - 9, 45 - 9, 90 - 9$, es decir,

$$n = 1, 6, 9, 21, 36, 81.$$

En consecuencia, existen 6 enteros positivos n que satisfacen la condición del problema.

Respuesta: (D) 6

Solución del Problema 12. Recordemos que, para todo entero $n \geq 2$, la función $\varphi(n)$ satisface $1 \leq \varphi(n) \leq n - 1$, donde la igualdad $\varphi(n) = n - 1$ ocurre si y solo si

n es primo. Como $n + \varphi(n) = 25$, se obtiene, usando las desigualdades anteriores, $n + 1 \leq 25 \leq n + (n - 1) = 2n - 1$. De aquí se deduce que

$$13 \leq n \leq 24.$$

Ahora distinguimos dos casos.

Caso 1. n es primo.

En este caso, $\varphi(n) = n - 1$, por lo que $n + \varphi(n) = 2n - 1 = 25$. De aquí, $2n = 26$, y, por tanto, $n = 13$, que efectivamente es un número primo.

Caso 2. n es compuesto.

Los enteros compuestos comprendidos entre 13 y 24 son

$$14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24.$$

Calculamos el valor de $\varphi(n)$ para cada uno de ellos:

n	$\varphi(n)$	$n + \varphi(n)$
14	6	20
15	8	23
16	8	24
18	6	24
20	8	28
21	12	33
22	10	32
24	8	32

Ninguno de estos valores satisface la ecuación. Por consiguiente, la única solución de $n + \varphi(n) = 25$ es $n = 13$. En consecuencia, la ecuación tiene

Respuesta: (B) 1

Solución del Problema 13. Sea ω la circunferencia con centro en D y radio r . Como P_1 y Q_1 son los puntos de intersección de ω con ω_1 , la cuerda P_1Q_1 es común a ambas circunferencias. En consecuencia, la recta que une sus centros, es decir, la recta AD , es perpendicular a P_1Q_1 y pasa por su punto medio. Por lo tanto, si h_1 es la distancia de P_1 a la recta AD , se tiene $P_1Q_1 = 2h_1$.

De manera análoga, la cuerda común P_2Q_2 de las circunferencias ω y ω_2 es perpendicular a la recta CD , que une sus centros, y esta pasa por su punto medio. Si h_2 es la distancia de P_2 a la recta CD , entonces $P_2Q_2 = 2h_2$.

Así, $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{h_1}{h_2}$. Consideremos ahora los triángulos ADP_1 y DCP_2 . Se verifica que

$$AD = BC = 8,$$

pues $ABCD$ es un paralelogramo, $DP_1 = DP_2 = r$, ya que ambos puntos pertenecen a la circunferencia ω , y $AP_1 = AB = 12$, $CP_2 = CB = 8$, porque $P_1 \in \omega_1$ y $P_2 \in \omega_2$. Por tanto,

$$AD = CP_2, \quad DP_1 = DP_2, \quad AP_1 = CD,$$

es decir, los triángulos ADP_1 y DCP_2 son congruentes por el criterio Lado-Lado-Lado. Las áreas de estos triángulos pueden expresarse como

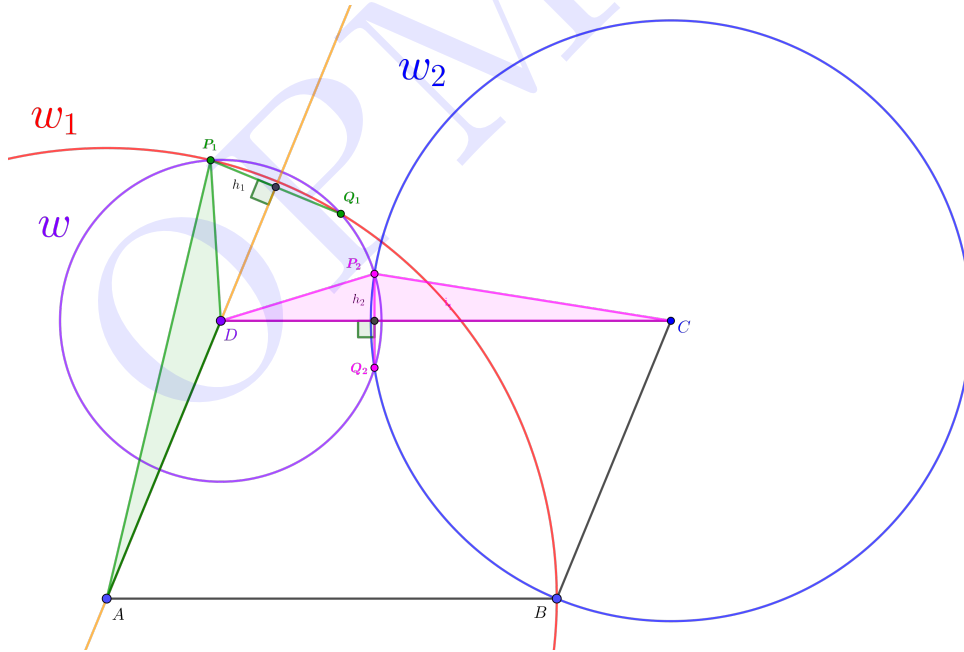
$$[ADP_1] = \frac{1}{2} AD \cdot h_1, \text{ y } [DCP_2] = \frac{1}{2} CD \cdot h_2.$$

Como los triángulos son congruentes, sus áreas son iguales. En consecuencia,

$$\frac{1}{2} AD \cdot h_1 = \frac{1}{2} CD \cdot h_2,$$

de donde $\frac{h_1}{h_2} = \frac{CD}{AD}$. Finalmente, como en el paralelogramo $AD = BC = 8$, $CD =$

$AB = 12$, se obtiene $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{CD}{AD} = \frac{12}{8} = \boxed{\frac{3}{2}}$.



Respuesta: (A) $\frac{3}{2}$

Clave de respuestas

1. (C) 33
2. (B) 5
3. (E) 45
4. (C) 6
5. (B) 9
6. (C) 350
7. (C) 5
8. (B) 50
9. (A) 3
10. (D) -2053351
11. (D) 6
12. (B) 1
13. (A) $\frac{3}{2}$

OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA
Av. Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
<https://opmat.fcpn.edu.bo/>