



23.a OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática  
Facultad de Ciencias Puras y Naturales – Universidad Mayor de San Andrés



(5<sup>to</sup> y 6<sup>to</sup> de Secundaria)

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA – FASE 2

Categoría:  $\gamma$

Parte I: Preguntas de Opciones Múltiples

**Problema 1.** Suponga que  $2026 \log_{2^{2026}} \sqrt{2026} + \frac{2}{\log_{\sqrt{2026}} 2} = \log_2 M$ . Determine  $M$ .

- (A) 3                      (B) 2026                      (C)  $2026^2$                       (D)  $2026\sqrt{2026}$                       (E)  $\sqrt{2026}$

**Solución.** Usando las propiedades

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x, \quad \frac{1}{\log_a b} = \log_b a,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 2026 \log_{2^{2026}} \sqrt{2026} + \frac{2}{\log_{\sqrt{2026}} 2} &= \log_2 \sqrt{2026} + 2 \log_2 \sqrt{2026} \\ &= 3 \log_2 \sqrt{2026} \\ &= \log_2 \left( (\sqrt{2026})^3 \right) \\ &= \log_2 \left( 2026\sqrt{2026} \right). \end{aligned}$$

Igualando sigue que  $M = 2026\sqrt{2026}$ .

Respuesta: (D)  $2026\sqrt{2026}$

**Problema 2.** Entre todos los pares de números reales  $(x, y)$  que satisfacen  $(x^3 - y)^{2024} + (x - y)^{2026} = 0$ , determine el máximo valor posible de  $|x| + |y|$ .

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

**Solución.** Como ambos exponentes son pares,  $(x^3 - y)^{2024} \geq 0$ ,  $(x - y)^{2026} \geq 0$ . Por tanto, su suma es cero si y solo si ambos términos son cero:

$$\begin{aligned} (x^3 - y)^{2024} + (x - y)^{2026} = 0 &\iff x^3 - y = 0, \quad x - y = 0 \\ &\iff y = x^3, \quad y = x \\ &\iff x^3 = x \\ &\iff x(x - 1)(x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Así,  $(x, y) \in \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1)\}$ . Consecuentemente,  $\max(|x| + |y|) = 2$ .

Respuesta: (C) 2

**Problema 3.** Una sucesión se define de la siguiente manera  $a_1 = 2$  y, para  $n \geq 1$ ,  $a_{n+1}$  = el número de apariciones de  $a_n$  entre los primeros  $n$  términos de la sucesión. Determine el valor de  $a_{2026}$ .

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 507                      (D) 508                      (E) 509

**Solución.** Calculamos algunos términos de la sucesión:  $(a_1, a_2, \dots, a_{10}) = (2, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 4)$ . A partir de estos términos observamos que aparecen bloques de cuatro términos con una estructura regular. Demostraremos por inducción que, para todo entero  $m \geq 3$ ,

$$(a_{4m-5}, a_{4m-4}, a_{4m-3}, a_{4m-2}) = (1, m, 2, m + 1).$$

**Paso inicial.** Para  $m = 3$ , los términos correspondientes son  $(a_7, a_8, a_9, a_{10}) = (1, 3, 2, 4)$ , y la afirmación es cierta para  $m = 3$ .

**Paso inductivo.** Supongamos que la afirmación es válida para todos los bloques hasta un cierto  $m \geq 3$ . En particular,

$$(a_{4m-5}, a_{4m-4}, a_{4m-3}, a_{4m-2}) = (1, m, 2, m + 1).$$

Como  $a_{4m-2} = m + 1$ , y este valor aparece por primera vez en la posición  $4m - 2$ , entre los primeros  $4m - 1$  términos aparece una sola vez. Por definición de la sucesión,

$$a_{4m-1} = 1.$$

Ahora contemos las apariciones del número 1 entre los primeros  $4m - 1$  términos. En los primeros seis términos,  $(a_1, \dots, a_6) = (2, 1, 1, 2, 2, 3)$ , el número 1 aparece dos veces. Además, cada uno de los bloques correspondientes a  $3, 4, \dots, m$  contiene exactamente un 1. Hay  $m - 2$  bloques de este tipo. Finalmente, tenemos el nuevo término  $a_{4m-1} = 1$ . Por lo tanto, el número total de apariciones de 1 entre los primeros  $4m - 1$  términos es  $2 + (m - 2) + 1 = m + 1$ . Así,  $a_{4m} = m + 1$ . El número  $m + 1$  ha aparecido exactamente dos veces hasta ese momento: una vez en  $a_{4m-2}$  y otra en  $a_{4m}$ . Por consiguiente,  $a_{4m+1} = 2$ . Finalmente, contemos las apariciones del número 2 entre los primeros  $4m + 1$  términos. En los primeros seis términos, el número 2 aparece tres veces. Además, cada uno de los  $m - 2$  bloques anteriores contiene exactamente un 2, y el término  $a_{4m+1} = 2$  aporta una aparición adicional. Por tanto,  $3 + (m - 2) + 1 = m + 2$ . En consecuencia,  $a_{4m+2} = m + 2$ . Hemos obtenido

$$(a_{4m-1}, a_{4m}, a_{4m+1}, a_{4m+2}) = (1, m + 1, 2, m + 2),$$

que es precisamente el bloque correspondiente a  $m + 1$ , pues  $4(m + 1) - 5 = 4m - 1$ . Por lo tanto, la afirmación queda demostrada por inducción.

Finalmente, observamos que  $2026 = 4 \cdot 507 - 2$ . Por la fórmula demostrada,  $a_{4m-2} = m + 1$ . Tomando  $m = 507$ , obtenemos

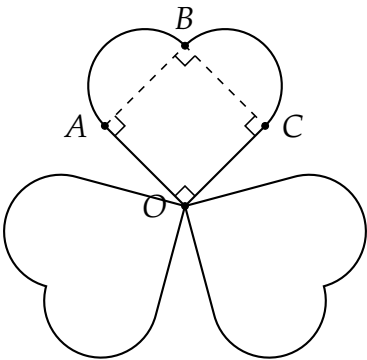
$$a_{2026} = a_{4(507)-2} = 507 + 1 = 508.$$

Por lo tanto,  $a_{2026} = 508$ .

Respuesta: (D) 508

Parte II: Preguntas de Respuesta Corta

**Problema 4.** Cada pétalo de un trébol está formado por un cuadrado y dos semicírculos, y todos los pétalos son congruentes. Halle el área del trébol si  $AB = BC = CO = OA = 2$ .



**Solución.** Cada pétalo contiene un cuadrado de lado 2 y dos semicírculos cuyos diámetros son dos lados del cuadrado. Por tanto, cada semicírculo tiene radio 1, y el área de un pétalo es

$$\begin{aligned} A_{\text{pétalo}} &= 2^2 + 2 \left( \frac{\pi(1)^2}{2} \right) \\ &= 4 + \pi. \end{aligned}$$

Como los tres pétalos son congruentes y sus interiores no se superponen,

$$A_{\text{trébol}} = 3(4 + \pi) = 12 + 3\pi.$$

Respuesta: 12 + 3π.

**Problema 5.** En un salón hay 1000 sillas numeradas del 1 al 1000. Cada silla está ocupada por una persona que es, o bien un *caballero*, quien siempre dice la verdad, o bien un *mentiroso*, quien siempre miente. Cada persona afirma:

«Toda persona, distinta de mí, cuyo número de silla termine en el mismo dígito que el mío es un mentiroso».

Determine el número de caballeros que hay en el salón.

**Solución.** Agrupemos a las personas según el último dígito del número de su silla. Existen 10 grupos, correspondientes a los dígitos

$$0, 1, 2, \dots, 9.$$

Cada grupo contiene exactamente 100 personas. Consideremos uno de estos grupos y demostremos que contiene exactamente un caballero.

1. **Existe al menos un caballero en cada grupo.** Supongamos, por el contrario, que las 100 personas del grupo fueran mentirosas. Entonces, cada una de ellas afirma que las otras 99 personas de su grupo son mentirosas. Pero esto sería cierto, pues, bajo nuestra suposición, todas las demás personas del grupo son efectivamente mentirosas. Por lo tanto, cada una estaría diciendo la verdad, lo cual contradice el hecho de que todas son mentirosas. Así, cada grupo contiene *al menos un caballero*.
2. **Existe a lo sumo un caballero en cada grupo.** Supongamos ahora que un grupo contiene dos caballeros. Cada uno de ellos afirma que todas las demás personas de su grupo son mentirosas. Sin embargo, cada uno de estos dos caballeros tiene al otro caballero entre las personas cuyo número de silla termina en el mismo dígito. Por lo tanto, su afirmación es falsa. Esto contradice nuevamente el hecho de que un caballero siempre dice la verdad. En consecuencia, cada grupo contiene *a lo sumo un caballero*. De los dos resultados anteriores concluimos que cada uno de los 10 grupos contiene exactamente un caballero. Por lo tanto, el número total de caballeros es  $10 \cdot 1 = 10$ .

Respuesta: 10.

**Problema 6.** Determinar el dígito de la unidad en la siguiente sumatoria:

$$S = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2026}$$

**Solución.** Para determinar la cifra de las unidades de  $S$ , basta calcular cada potencia de 3 módulo 10. Observamos que

$$3^1 \equiv 3, \quad 3^2 \equiv 9, \quad 3^3 \equiv 7, \quad 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

A partir de este punto, las potencias se repiten con período 4, pues  $3^{n+4} \equiv 3^n \pmod{10}$ . Por tanto, las cifras de las unidades de las potencias de 3 siguen el ciclo

3, 9, 7, 1.

La suma correspondiente a un ciclo completo es  $3 + 9 + 7 + 1 = 20 \equiv 0 \pmod{10}$ . Ahora dividimos 2026 entre 4:

$$2026 = 4 \cdot 506 + 2.$$

Por lo tanto, existen 506 ciclos completos y quedan las dos potencias  $3^{2025}$  y  $3^{2026}$ , cuyas cifras de las unidades son, respectivamente, 3 y 9. En consecuencia,

$$\begin{aligned} S &\equiv 506(3 + 9 + 7 + 1) + 3 + 9 \pmod{10} \\ &\equiv 506(20) + 12 \pmod{10} \\ &\equiv 2 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cifra de las unidades de  $S$  es 2.

Respuesta: 2.

**Problema 7.** Tres pueblos  $X, Y, Z$  se encuentran en el plano en las coordenadas  $(0, 0), (200, 0)$  y  $(0, 300)$ , respectivamente. En los pueblos  $X, Y, Z$  hay 100, 200 y 300 estudiantes, respectivamente. Se construirá una escuela en un punto  $(x, y)$ , donde  $x$  e  $y$  son enteros, de modo que la distancia total recorrida por todos los estudiantes sea mínima. Determine  $x + y$ .

**Solución.** Sea  $P$  el punto donde se construirá la escuela. La distancia total recorrida por todos los estudiantes es

$$F(P) = 100\,PX + 200\,PY + 300\,PZ,$$

donde  $PX, PY$  y  $PZ$  representan las distancias entre  $P$  y los puntos  $X, Y$  y  $Z$ , respectivamente. Como  $300 = 100 + 200$ , podemos comparar  $F(P)$  con el valor que se obtiene al construir la escuela en  $Z$ . En efecto,

$$F(Z) = 100\,ZX + 200\,ZY.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F(P) - F(Z) &= 100\,PX + 200\,PY + 300\,PZ - 100\,ZX - 200\,ZY \\ &= 100(PX + PZ - ZX) + 200(PY + PZ - ZY). \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular,  $PX + PZ \geq ZX$  y  $PY + PZ \geq ZY$ . En consecuencia,  $F(P) - F(Z) \geq 0$ , y, por tanto,  $F(P) \geq F(Z)$ . Así, la distancia total recorrida es mínima cuando la escuela se construye en el punto  $Z$ . Para verificar que el mínimo es único, la igualdad  $F(P) = F(Z)$  exige simultáneamente

$$PX + PZ = ZX \quad \text{y} \quad PY + PZ = ZY.$$

La igualdad en la desigualdad triangular ocurre únicamente cuando  $P$  pertenece al segmento que une los dos puntos considerados. Por consiguiente,  $P \in \overline{XZ}$  y  $P \in \overline{YZ}$ . Los segmentos  $\overline{XZ}$  y  $\overline{YZ}$  se intersectan únicamente en el punto  $Z$ . Luego,  $P = Z = (0, 300)$ . Por lo tanto,  $x = 0, y = 300$ , y se obtiene  $x + y = 300$ .

Respuesta: 300.

**Problema 8.** Dada la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{2^{x+2}}{2^x+1}$ . Determine el valor de la suma

$$f\left(-\frac{1}{2026}\right) + f\left(-\frac{1}{2025}\right) + \cdots + f(-1) + f(0) + f(1) + \cdots + f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{1}{2026}\right).$$

**Solución.** Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{4 \cdot 2^x}{2^x + 1} + \frac{2^{2-x}}{2^{-x} + 1} \\ &= \frac{4 \cdot 2^x}{2^x + 1} + \frac{4}{2^x + 1} \\ &= 4. \end{aligned}$$

La suma contiene 2026 pares de la forma

$$f\left(-\frac{1}{k}\right) + f\left(\frac{1}{k}\right), \quad 1 \leq k \leq 2026,$$

y además  $f(0) = \frac{4}{2} = 2$ . Por tanto,  $S = 2026 \cdot 4 + 2 = 8106$ .

**Respuesta: 8106.**

**Problema 9.** Sea  $n$  un entero positivo, determine el menor valor posible de  $n$  tal que  $\frac{2026n}{2026+n}$  también sea un entero positivo.

**Solución.** Como  $2026n = 2026(2026+n) - 2026^2$ , tenemos

$$\frac{2026n}{2026+n} \in \mathbb{Z} \iff 2026+n \mid 2026n \iff 2026+n \mid 2026^2.$$

Por lo tanto, debemos encontrar el menor divisor de  $2026^2$  que sea mayor que 2026, pues  $n > 0$  implica  $2026+n > 2026$ . Factorizamos 2026:  $2026 = 2 \cdot 1013$ . El número 1013 es primo, ya que no es divisible por ninguno de los números primos menores o iguales que

$$\sqrt{1013} < 32.$$

Por consiguiente,  $2026^2 = (2 \cdot 1013)^2 = 2^2 \cdot 1013^2$ . Los divisores positivos de  $2026^2$  tienen la forma

$$2^i \cdot 1013^j, \quad 0 \leq i \leq 2, \quad 0 \leq j \leq 2.$$

En particular, los divisores que no exceden 2026 son: 1, 2, 1013, 2026, mientras que el siguiente divisor es

$$2^2 \cdot 1013 = 4052.$$

Por lo tanto, el menor divisor de  $2026^2$  que es estrictamente mayor que 2026 es 4052. Así,

$$2026+n = 4052,$$

de donde  $n = 4052 - 2026 = 2026$ . Finalmente, verificamos que este valor cumple la condición:

$$\frac{2026 \cdot 2026}{2026+2026} = \frac{2026}{2} = 1013,$$

que es un entero positivo. Por lo tanto, el menor valor posible de  $n$  es 2026.

**Respuesta: 2026.**

**Problema 10.** Determine cuántos números naturales de 5 dígitos satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

- 1) ninguno de sus dígitos es igual a 0;
- 2) los dígitos pueden repetirse;
- 3) la diferencia absoluta entre cualesquiera dos dígitos consecutivos es exactamente 1.

**Solución.** Sea  $d_1d_2d_3d_4d_5$  un número de 5 dígitos que satisface las condiciones del problema. Como ningún dígito puede ser 0, todos sus dígitos pertenecen al conjunto

$$\{1, 2, \dots, 9\}.$$

Para  $1 \leq j \leq 9$ , denotemos por  $N_r(j)$  el número de sucesiones admisibles de  $r$  dígitos cuyo primer dígito es  $j$ , donde dos dígitos consecutivos difieren en valor absoluto exactamente en 1. Para una sucesión de un solo dígito, existe exactamente una posibilidad para cada dígito inicial. Por tanto,

$$N_1(j) = 1, \quad 1 \leq j \leq 9.$$

Ahora consideremos una sucesión admisible de  $r + 1$  dígitos cuyo primer dígito es  $j$ . El segundo dígito debe ser necesariamente  $j - 1$  o  $j + 1$ . Por ello,

$$N_{r+1}(j) = N_r(j - 1) + N_r(j + 1).$$

Para incluir correctamente los extremos 1 y 9, adoptamos las convenciones

$$N_r(0) = N_r(10) = 0.$$

Aplicando sucesivamente la recurrencia, obtenemos:

|       | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9 |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|----|---|
| $N_1$ | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1 |
| $N_2$ | 1 | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 1 |
| $N_3$ | 2 | 3  | 4  | 4  | 4  | 4  | 4  | 3  | 2 |
| $N_4$ | 3 | 6  | 7  | 8  | 8  | 8  | 7  | 6  | 3 |
| $N_5$ | 6 | 10 | 14 | 15 | 16 | 15 | 14 | 10 | 6 |

Por ejemplo,  $N_5(1) = N_4(2) = 6$ , mientras que  $N_5(2) = N_4(1) + N_4(3) = 3 + 7 = 10$ . Cada número de 5 dígitos admisible tiene un único primer dígito. Por lo tanto, el número total de números buscados se obtiene sumando los valores de la última fila:

$$N = \sum_{j=1}^9 N_5(j) = 6 + 10 + 14 + 15 + 16 + 15 + 14 + 10 + 6 = 106$$

Por lo tanto, existen 106 números de 5 dígitos que satisfacen las condiciones dadas.

Respuesta: 106.

**Problema 11.** Determinar el número de ternas ordenadas distintas  $(x, y, z)$  que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 12, \\ xy + 4yz + 2xz = 22, \\ xyz = 6. \end{cases}$$

**Solución.** Realizamos el cambio de variables  $a = x, b = 2y, c = 4z$ . Con estas definiciones, el sistema original se transforma de la siguiente manera. De la primera ecuación,  $a + b + c = x + 2y + 4z = 12$ . Además,  $ab + bc + ca = x(2y) + (2y)(4z) + x(4z) = 2xy + 8yz + 4xz = 2(xy + 4yz + 2xz) = 44$ . Finalmente,  $abc = x(2y)(4z) = 8xyz = 48$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} a + b + c &= 12, \\ ab + bc + ca &= 44, \\ abc &= 48. \end{aligned}$$

Estas son precisamente las relaciones de Viète para el polinomio

$$P(t) = t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t - abc$$

Así,  $P(t) = t^3 - 12t^2 + 44t - 48$ . Factorizando,  $P(t) = (t - 2)(t - 4)(t - 6)$ . Por lo tanto,  $(a, b, c)$  son, en algún orden, los números  $(2, 4, 6)$ ; es decir,  $\{a, b, c\} = \{2, 4, 6\}$ . Como  $(a = x), (b = 2y)$  y  $(c = 4z)$ , cada una de las  $(3!=6)$  formas de ordenar  $(2, 4, 6)$  determina una única terna ordenada  $\{(x, y, z)\}$ . Además, todas ellas son distintas. Por consiguiente, el número de ternas ordenadas que satisfacen el sistema es 6.

Respuesta: 6.

# Clave de respuestas



1. (D)  $2026\sqrt{2026}$ .
2. (C) 2.
3. (D) 508.
4.  $12 + 3\pi$
5. 10.
6. 2.
7. 300.
8. 8106.
9. 2026.
10. 106.
11. 6

OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA  
Av. Villazón 1995 Predio Central UMSA,  
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,  
e-mail: [opmatumsa@fcpn.edu.bo](mailto:opmatumsa@fcpn.edu.bo)  
<https://opmat.fcpn.edu.bo/>